УДК 539.3

И.А. Колесник, Д.Г. Зеленцов,
Ю.А. Храпач

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ КОРРОЗИОННОМУ ИЗНОСУ

Пропонується постановка та методика рішення задачі векторної оптимізації стержневих конструкцій, які підлягають дії агресивних середовищ. Розглядується загальний випадок корозійного зносу, коли швидкість корозії є функцією напружень в елементах конструкції. Об'єктами досліджень є статично невизначені багатоелементні ферми.

THE MULTICRITERIAL OPTIMIZATION OF ROD CONSTRUCTIONS ARE EXPOSED BY CORROSION WEAR

The statement and methodic of the decision of a vectorial optimization task for rod constructions in hostile environments is offered. The common case of a corrosion wear is considered, when the speed of corrosion is function of stresses in elements of constructions. Plants research are statically uncertain multiple constructions.

В связи с повышающимися требованиями к надежности, прочности и долговечности строительных конструкций, проблема поиска оптимального проекта таких конструкций является актуальной задачей. Причем, во многих задачах оптимального проектирования технических систем приходится рассматривать не один критерий эффективности, а совокупность критериев. Этой проблеме посвящены работы многих авторов.

В настоящей работе предлагается постановка и алгоритм решения задачи векторной оптимизации многоэлементной стержневой системы, находящейся в агрессивной среде. Объектами исследования являются плоские фермы.

Рассматривается общий случай коррозионного взаимодействия, когда скорость коррозии является функцией напряжений, которые, в свою очередь, изменяются с течением времени. В качестве модели, описывающей процесс коррозии, примем модель в виде [1]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k\sigma) \tag{1}$$

где δ - глубина коррозионного поражения; t - время; v_0 - скорость коррозии; k - коэффициент, учитывающий влияние напряжений на скорость коррозии; σ - абсолютное значение текущего напряжения.

Вообще говоря, решению проблемы напряженно-деформированного состояния (НДС) и оптимального проектирования ферм и их отдельных элементов в условиях коррозионного износа посвящены, например, работы [2, 3]. В этих работах в качестве критерия оптимальности принимался минимум объема конструкции в начальный момент времени при заданном сроке ее эксплуатации. Надежность конструкции обеспечивалась ограничениями по прочности и устойчивости ее элементов.

Предлагаемая постановка формулируется как векторная задача математического программирования. В качестве варьируемых параметров рассматриваются геометрические параметры сечений элементов конструкции. В качестве критериев оптимальности примем минимум объема конструкции в начальный момент времени и максимум ее долговечности [4]:

$$T(x) \to \max;\ x \in G_x$$
$$V(x) \to \min;\ x \in G_x$$

Здесь T - значение долговечности фермы; V - значение массы фермы x – набор управляемых параметров; G_x – допустимая область поиска решения.

Обобщенный скалярный критерий оптимальности для данной постановки примет вид:

$$F = \frac{T^+ - T^*}{T^+ - T^-} n_1 + \frac{V^* - V^-}{V^+ - V^-} n_2 \to \min. \qquad (2)$$

Здесь T^+, T^- - соответственно, наибольшее и наименьшее значения долговечности конструкции; V^+, V^- - соответственно, наибольшее и наименьшее значения объема конструкции; T^* - текущее значение долговечности фермы; V^*-текущее значение объема фермы; n_1, n_2 - весовые коэффициенты критериев ($n_1 + n_2 = 1$).

На каждом шаге поиска оптимального проекта необходимо вычислять значение долговечности фермы определяемой моментом исчерпания несущей способности конструкции в целом, то есть предполагается решение задачи долговечности конструкции по критериям прочности и устойчивости. Таким образом, сформулированная задача является задачей безусловной оптимизации.

Традиционный подход к решению задачи долговечности фермы, функционирующей в химически активной среде, предполагает использование численного метода решения системы дифференциальных уравнений совместно с каким-либо методом решения задачи НДС, например, метода конечных элементов [3].

При этом задача НДС решается, как правило, на каждой итерации численного решения системы, а количество итераций может достигать нескольких сотен. Так как решение системы на данном шаге получается из решения на предыдущем, то многократное решение системы линейных алгебраических уравнений в задаче НДС приводит к накоплению погрешности вычисления. Наряду с этим в [5] для стержня произвольного поперечного сечения получены аналитические зависимости, позволяющие определить его долговечность в произвольный момент времени. В частности, для стержня круглого поперечного сечения получена аналитическая зависимость (3), позволяющая точно определить время, за которое напряжения в стержне возрастут от начального значения σ_0 до произвольного значения σ:

$$t^{*} = \frac{R_0\sqrt{\sigma_0}}{v_0}\left(\frac{\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\sigma\sigma_0}} + \sqrt{k}\,(arctg\sqrt{k\sigma_0} - arctg\sqrt{k\sigma}\,)\right), \qquad (3)$$

где R_0 - начальный радиус; v_0 - скорость коррозии; k - коэффициент, учитывающий влияние напряжений на скорость коррозии.

Подставив в (3) предельное значение напряжений, можно получить значение долговечности стержня.

Для стержня произвольного поперечного сечения аналитические зависимости имеют вид:

$$t = t_0 - 2kQ\left[arctg\frac{2a\delta + b}{d_1} - arctg\frac{b}{d_1}\right]\frac{1}{v_0 d_1} \qquad (4)$$

или

$$t = t_0 - 2kQ\ln\left[\frac{(2a\delta + b - d_2)(b + d_2)}{(b - d_2)(2a\delta + b + d_2)}\right]\frac{1}{v_0 d_2}. \qquad (5)$$

В (4) и (5) приняты следующие обозначения: $t_0=\delta/v_0$; a=s; b=–P; $c=F_0+kQ$; $d_1=\sqrt{4ac-b^2}$; $d_2=\sqrt{b^2-4ac}$. Формула (4) реализуется при $4ac - b^2 > 0$, формула (5) при $4ac - b^2 < 0$.

В полученных формулах значение времени определяется через соответствующее ему значение глубины коррозии δ, которое заранее неизвестно. Для растянутого стержня δ определяется из квадратного уравнения:

$$s\delta^2 - P_0\delta + F_0 - \frac{Q}{\sigma} = 0, \qquad (6)$$

а для сжатого — из нелинейного уравнения вида:

$$\frac{QL}{E\pi^2} = I_{\min}(t). \qquad (7)$$

В (6) и (7) s - коэффициент формы сечения (для уголка, швеллера, двутавра s=4, для круга $s=\pi$), P_0 и F_0 - площадь и периметр сечения в начальный момент времени, $I_{min}(t)$ - минимальный момент инерции, L - приведенная длина стержня, Q - усилие в стержне.

В работе [2] было показано, что для определения долговечности статически неопределимых ферм использование аналитических зависимостей (4) и (5) весьма обосновано, так как скорость изменения напряжений намного больше, чем скорость изменения внутренних усилий в элементах конструкции. Система дифференциальных уравнений (2) может рассматриваться как автономная, а решением каждого уравнения этой системы являются зависимости (4) и (5).

Особенностью задач расчета и оптимального проектирования конструкций с учетом воздействия агрессивной среды является то, что вычислительные затраты при определении значений целевой функции несопоставимы с затратами при вычислении долговечности конструкции. Последнее предполагает решение задачи НДС конструкции через заданный период времени на каждом шаге поиска оптимального проекта. Это решение представляет собой итерационный процесс, и основной объем вычислений приходится на многократную реализацию численной процедуры, в частности, метода конечных элементов (МКЭ). Оценим общее число обращений к процедуре МКЭ в процессе решения задачи. Алгоритм случайного поиска предусматривает в случае, когда при выполнении шага в данном направлении улучшения целевой функции не происходит, выполнение шага в противоположном. Таким образом, при выполнении серии шагов обращение к процедуре МКЭ происходит на каждом шаге. Очевидно, повышение эффективности алгоритмов решения оптимизационных задач напрямую зависит как от уменьшения числа обращений к процедуре МКЭ при вычислении долговечности конструкции, так и от выбора алгоритма решения задачи нелинейного математического программирования.

Один из способов, позволяющих существенно уменьшить число обращений к процедуре МКЭ, состоит в следующем. На начальном этапе решения задачи нелинейного математического программирования (НЛП) нет необходимости в точном вычислении долговечности конструкции, и, следовательно, целевой функции. При приближении к оптимальному решению погрешность вычисления целевой функции должна стремиться к нулю. Таким образом, можно связать значение погрешности вычисления целевой функции с количеством шагов итерационного процесса решения задачи НЛП. Такую функциональную связь можно осуществить, введя в рассмотрение функционал вида [6]:

$$T(\bar{x},n) = t^*(\bar{x}) - t(\bar{x},n),$$

где $t^*(\bar{x})$ - истинное значение долговечности конструкции; $t(\bar{x},n)$ - значение долговечности, вычисленное приближенно; n – число обращений к процедуре МКЭ.

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} T(\bar{x}, n) = 0$$

Зависимость числа n обращений к процедуре МКЭ от числа итераций может быть определено следующим образом:

$$n(s) = \mathrm{int}(a^s),$$

где a – константа ($a>1$); s – количество итераций решения задачи НЛП.

При использовании такого подхода на первых шагах решения задачи НЛП вычисление долговечности осуществляется с помощью аналитических формул (4) или (5) и задача МКЭ решается только один раз. При увеличении числа s соответственно увеличивается число обращений к процедуре МКЭ и погрешность решения задачи долговечности уменьшается.

Как показали результаты численного эксперимента при n>5 и использовании численного алгоритма, описанного в [2] погрешность решения задачи долговечности не превышает 0,2%.

Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим в качестве объекта исследования статически неопределимую десятистержневую нагруженную плоскую ферму (рис. 1). Для определенности будем считать, что все стержни имеют равное круглое поперечное сечение. Параметры конструкции и среды: Q= 15000 Н; R = 3 см; E = 2,1× 10^5 МПа; v_0 = 0,15 см/год; длина стержней с номерами 1, 2, 5, 6, 7, 10 - L = 50 см, а стержни номер 3, 4, 8, 9 имеют длину L=70,71 см; [σ]= 240 МПа. Долговечность исходного проекта T=11,8 лет, объем исходного проекта V=0,016 $м^3$.

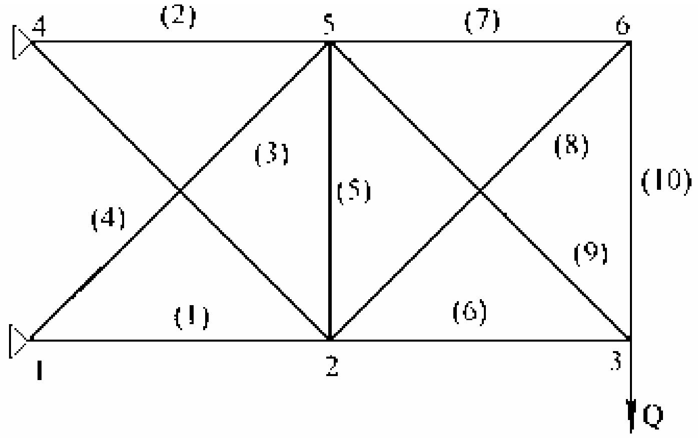

Рис.1 - Статически неопределимая ферма

На рисунках 2, 3 и в таблице 1 приведены некоторые полученные результаты.

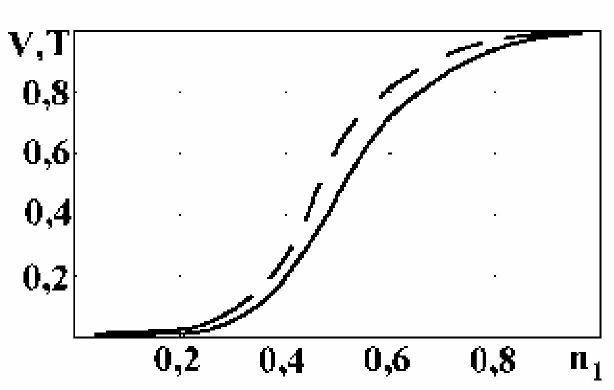

Рис. 2 – Зависимость объема и долговечности фермы от весовых коэффициентов

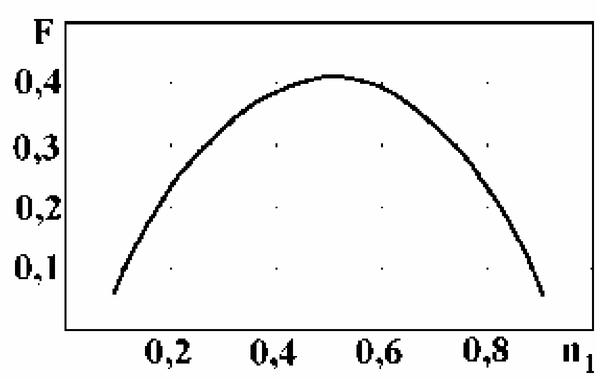

Рис. 3 – Зависимость целевой функции от весовых коэффициентов

Таблица 1 – Значения долговечности и объема конструкции в зависимости от весовых коэффициентов

n_1	T, долговечность, лет	n_2	V, объем м^3
0	3,06	1	0,0044
0,1	3,61	0,9	0,0044
0,2	4,09	0,8	0,0046
0,3	5,73	0,7	0,0056
0,4	7,22	0,6	0,0073
0,5	14,79	0,5	0,019
0,6	21,31	0,4	0,032
0,7	21,35	0,3	0,037
0,8	21,35	0,2	0,036
0,9	21,35	0,1	0,037
1	21,37	0	0,036

На рисунке 2 показаны зависимости объема и долговечности конструкции от весовых коэффициентов. Изменение объема показано пунктирной линией. Как видно из рисунка изменение объема и долговечности фермы происходит практически по одному закону, и кривые имеют одинаковый характер.

На рисунке 3 представлен график изменения целевой функции в зависимости от весовых коэффициентов. На интервале [0; 0,5] график монотонно возрастает, в точке 0,5 достигает своего максимального значения и на интервале [0,5;1] монотонно убывает. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что наиболее предпочтительно рассматривать задачу поиска оптимального проекта конструкции, как задачу нелинейного математического программирования, критерием оптимальности которой является либо максимум долговечности фермы при заданной массе, либо минимум ее массы при заданном сроке эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долинский В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии.//Исследования по теории оболочек.-Казань 1976.-Вып.7.-с.37-42.

2. Зеленцов Д.Г. Об одном алгоритме численного решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений.//Придніпровський науковий вісник. Фізико-математичні науки. – 1998.-№112(179).- с. 31-37.

3. Зеленцов Д.Г., Кольчик С.В. Моделирование процесса коррозионного износа в задачах оптимального проектирования конструкций, использующих метод конечных элементов.//Компьютерные методы в задачах прикладной математики и механики. Сб. научн. трудов ИК НАН Украины. – К., 1998. – с.40-47.

4. Скалозуб В.В., Зеленцов Д.Г., Солодкая Н.А. Исследование компромиссно-оптимальных свойств изгибаемых стержней, работающих в агрессивных средах.//Ресурсосберегающие технологии в транспортном и гидротехническом строительстве. Сб. научн. трудов №9. – Днепропетровск, АРТпресс, - 2000 – с. 163-167.

5. Колесник И.А., Зеленцов Д.Г., Храпач Ю.А. Моделирование коррозионных процессов в стержнях при осевом растяжении и сжатии.// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Вип. 1(9). – Дніпропетровськ, 2000. – с.49-55.

6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., Мир, 1975, 534 с.